Reguli de calcul cu radical

Condiții

La ecuații logaritmice se pune $>$, exemplu:

$$\log_2(x+2) + \log_2 x = 3 \quad \left|\begin{array}{r} x+2>0 \\ x>0 \end{array}\right| \Rightarrow x \in (0, +\infty)$$

La ecuații cu radical se pune $\geq$, exemplu:

$$\sqrt{2+x} = x \quad \left|\begin{array}{r} 2+x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow x \in [0, +\infty)$$

Reguli de calcul cu puteri

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

$a^n = a^m \iff n=m$

$a^n = b^n \iff a=b$

c m m m c

Regula de 3 simplă

cunoaştem 3 elemente din 4 şi dorim să îl aflăm pe al 4-lea. Exemplu: ne trebuie **3** kg de zahăr pentru **7** prăjituri, **câte** kg de zahăr ne trebuie pentru **9** prăjituri?

$$\begin{array}{l} 3 = 7 \\ X = 9 \end{array} \Rightarrow \frac{3}{X} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{\frac{7}{9}}{3} = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = \frac{7}{27} \Rightarrow X = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7} = 3{,}85$$

sau

$$\begin{array}{l} 3 = 7 \\ X = 9 \end{array} \Rightarrow \frac{3}{X} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{X}{3} = \frac{9}{7} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 9}{7} = \frac{27}{7}$$

deci rezultă ca pentru 9 prăjituri avem nevoie de 3,85 kg de zahăr.

Semnele funcției

Funcție de gradul I

$ax + b = 0$; $ax = -b$; $x = -b/a$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
f(x)		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Funcție de gradul II

Cazul 1: $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Cazul 2: $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

Cazul 3: $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are rădăcini reale

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	

Subiecte de tip I

Numere reale
Şiruri. Progresii
Funcții (radical, exponențială, logaritmică)
Ecuații. Inecuații
Combinatorică
Probabilități
Trigonometrie
Vectori
Geometrie analitică

Subiecte de tip II

Matrice. Determinanți
Sisteme de ecuații liniare
Legi de compoziție
Polinoame

Subiecte de tip III

Limite de funcții
Asimptote
Funcții continue
Funcții derivabile
Primitive
Integrale

FORMULE PENTRU SUBIECTE DE TIPUL I

Progresia aritmetică

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$ $\quad \forall n \geq 1$

$$\boxed{S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}}$$

Progresia geometrică

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ unde q = rația

$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q}$

$b_{n+2} = b_n \cdot q \cdot q$

$\boxed{b^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}}$

$$\boxed{S_n = \begin{cases} nb_1 & \text{,dacă } q=1 \\ b_1\dfrac{(q^n-1)}{q-1} & \text{,dacă } q\neq 1 \end{cases}}$$

Logaritmi

$\boxed{a^x = N \iff X = \log_a N}$

$a>0$; $a\neq 1$; $A>0$; $B>0$; $m,n \in N^*$

$\log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B$

$\log_a A : B = \log_a A - \log_a B$

$\log_a A^m = m \log_a A$

$\log_a 1 : B = -\log_a B$

$\log_a a = 1$ $\qquad \log_a 1 = 0$

$\lg a = \log_{10} a$ $\qquad \ln a = \log_e a$ $\qquad \ln e = 1$

Permutări

$\boxed{P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n}$ prin convenție $0! = 1$

Ex 1: $5! + 2! = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)+(1\cdot2) = 120+2 = 122$

Ex 2: $\dfrac{3!}{4!} = \dfrac{\cancel{1\cdot2\cdot3}}{\cancel{1\cdot2\cdot3}\cdot4} = \dfrac{1}{4}$

Ex 3: $\dfrac{100!}{101!} = \dfrac{\cancel{100!}}{\cancel{100!}\cdot 101} = \dfrac{1}{101}$

Ex 4: $\dfrac{7!}{4!} = \dfrac{\cancel{4!}\cdot5\cdot6\cdot7}{\cancel{4!}} = 210$

Ex 5: $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n^2+n}$

Aranjamente

$\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ unde $n \geq 1 \in N$ și $0 \leq k \leq n$

$A_n^0 = 1$

$A_n^n = n!$

Combinări

$\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$ unde $n \in N$ și $0 \leq k \leq n$

$C_n^0 = 1$ $\qquad C_n^n = 1$ $\qquad C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Termenul general al dezvoltării

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Relațiile lui Vieté (pentru polinom de grad II)

$ax^2 + bx + c = 0 \quad |:a \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$ sau $\boxed{a(X-x_1)(X-x_2) = 0}$

Relațiile lui Vieté (pentru polinom de grad III)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$

$\boxed{x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0}$

Relațiile lui Vieté (pentru polinom de grad IV)

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$

$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$

$S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$

$\boxed{x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0}$

Vârful parabolei asociate unei funcții

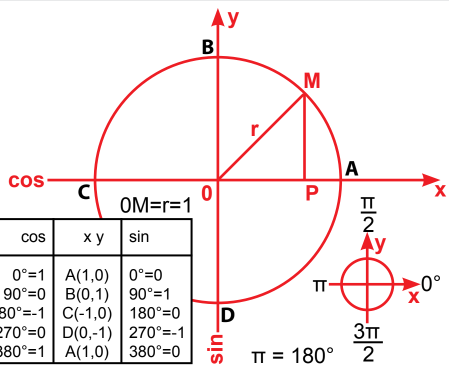
$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ unde $\frac{-b}{2a}$ este x, iar $\frac{-\Delta}{4a}$ este y.

Tabelul valorilor sin, cos, tg, ctg la 30°, 45°, 60°

$\pi = 180°$

	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cercul trigonometric



cos	x y	sin
0°=1 90°=0 180°=-1 270°=0 380°=1	A(1,0) B(0,1) C(-1,0) D(0,-1) A(1,0)	0°=0 90°=1 180°=0 270°=-1 380°=0

Vectori

$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

$\vec{0A} + \vec{0B} = (x_B + x_A)\vec{i} + (y_B + y_A)\vec{j}$

Ecuatia dreptei ce trece printr-un punct și o pantă *m*

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Trigonometrie $[\ i^2 = c_1^2 + c_2^2\ ]$

Într-un Δ_{ABC} unde C are 90°:

$\sin(A) = \frac{a}{c}$

$\cos(A) = \frac{b}{c}$

$tg(A) = \frac{a}{b}$

$ctg(A) = \frac{b}{a}$

Legea sinus pentru orice Δ:

$\dfrac{a}{\sin(A)} = \dfrac{b}{\sin(B)} = \dfrac{c}{\sin(C)}$

Legea cosinus pentru orice Δ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$

Alte formule trigonometrice:

$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

$\sin(A\pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$

$\cos(A\pm B) = \cos(A)\cos(B) \pm \sin(A)\sin(B)$

$tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$ctg(x) = \dfrac{1}{tg(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Ecuatia dreptei ce trece prin 2 puncte

$AB: \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

sau matricial

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

FORMULE PENTRU SUBIECTE DE TIPUL II

Matrice (determinantul, regula triunghiului) M_3

① $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ⑥ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

+① +② +③ -④ -⑤ -⑥

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + bfg - ceg - bdi - ahf$$

Matrice (câteva proprietăți)

Transpusa unei matrice este matricea la care rândurile se înlocuiesc cu coloanele şi viceversa.

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.

2. Determinantul este 0 dacă ... :

a). ... toate elementele unui rând sau al unei coloane sunt 0.

b). ... 2 rânduri sau 2 coloane sunt identice.

c). ... elementele a 2 rânduri sau 2 coloane sunt proporționale.

3. Dacă 3 puncte dintr-un plan sunt transpuse într-o matrice iar determinantul acesteia este 0 atunci punctele sunt coliniare.

Matrice (inversa unei matrice) A^{-1}

1. Calculăm determinantul matricei ($\Delta \neq 0$).
2. Scriem transpusa matricei (${}^tA$).
3. Calculăm elementele din matricea adjunctă (A^*) la (${}^tA$);

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

astfel: $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(d_k)}$ pentru fiecare din elementele matricei adjuncte, unde: $\mathbf{A_{ij}}$ sunt complemenți algebrici, iar determinantul $\mathbf{d_k}$ se obține prin suprimarea liniei şi a coloanei aferente fiecărui element.

4. Se aplică formula finală: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = I_n}$$

Matrice (înmulțirea) M_3

Matrice (sistem liniar- metoda Cramer)

1. Calculăm determinantul matricei ($\Delta \neq 0$).

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$\Delta = \det A$

Δx_1 se obține din înlocuirea coloanei coeficienților proveniți de la x_1 din cadrul determinantului matricei A cu coloana termenului liber, analog la Δx_2 şi Δx_3.

Matrice (ecuații matriciale)

Ecuația I: $A \cdot X = B$

soluția ecuației date: $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

Ecuația II: $X \cdot A = B$

soluția ecuației date: $\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$

Legi de compoziție

		adunare (+)	înmulțire (•)
Legea internă	L.I. --> R	∀ x,y Є R avem x+y Є R	∀ x,y Є R avem x•y Є R
Asociativitatea	A. --> R	∀ x,y,z Є R avem (x+y)+z = x+(y+z)	∀ x,y,z Є R avem (x•y)•z = x•(y•z)
Elementul neutru	E.N. --> R	∀ x Є R ; există 0 Є R a.î. x+0 = 0+x = x	∀ x Є R, există 1 Є R a.î. x•1 = 1•x = x
Comutativitatea	C. --> R	∀ x,y Є R avem x+y = y+x	∀ x,y Є R avem x•y = y•x
Distributivitatea	D. --> R	∀ x,y,z Є R avem x•(y+z) = x•y + x•z (factorul comun este inversa distributivității)	
Elementul simetrizabil	E.S. --> Z,Q	∀ x Є Z,Q ; există -x Є Z,Q a.î. x+(-x) = -x+x = 0 unde -x este opusul lui x	
	E.S. --> Q		∀ x Є Q ; există x^{-1} Є Q a.î. $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

FORMULE PENTRU SUBIECTE DE TIPUL III

Reguli de Derivare

① $(f \pm g)' = f' \pm g'$

② $(\lambda f)' = \lambda f'$

③ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

④ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $g \neq 0$

Derivatele funcţiilor simple

Elementare:

① $c' = 0$

② $x' = 1$

③ $(x^n)' = nx^{n-1}$

④ $(a^x)' = a^x \ln(a)$

⑤ $(e^x)' = e^x$

⑥ $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

⑦ $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

⑧ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$

Trigonometrice:

① $[\sin(x)]' = \cos(x)$

② $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

③ $[tg(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

④ $[ctg(x)]' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

⑤ $[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑥ $[\arccos(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑦ $[arctg(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$

⑧ $[arcctg(x)]' = \frac{-1}{1+x^2}$

Derivatele funcţiilor compuse

Pentru funcția compusă notăm în loc de x cu u iar la rezolvare folosim aceaşi formulă ca şi la derivatele funcțiilor simple dar înmulțim în plus cu u' , exemplu:

$(x^n)' = nx^{n-1}$ => $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

Rolul primei derivate

Cu ajutorul primei derivate studiem monotonia funcției (creşterea şi descreşterea funcției).

① Calculăm f' (prima derivată)

② Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ de unde rezultă x ca fiind x_0

③ În tabelul de variație notăm rezultatul sau rezultatele de la x_0 în xona **x**.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'			
f			

④ Se trece la f' 0 în dreptul lui x_0 şi se face semnul funcției conform regulilor:

f' grad I;	semnul opus lui a	0	semnul lui a
f' grad II;	semnul lui a	0	semnul opus lui a

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'	+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - -
f			

⑤ Se trece $f(x_0)$ la **f** în dreptul lui 0 şi se notează în stânga şi dreapta lui $f(x_0)$ semnele ↗ sau ↘ în conform semnului funcției arătat deasupra.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'	+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - -
f	↗	$f(x_0)$	↘

În punctul $f(x_0)$ funcția admite un minim sau un maxim cu excepție în cazul în care funcția este strict crescătoare sau descrescătoare.

R