Reguli de calcul cu radical

Condiții

La ecuații logaritmice se pune $>$, exemplu:

$$\log_2(x+2) + \log_2 x = 3 \quad \left| \begin{array}{r} x+2>0 \\ x>0 \end{array} \right| \Rightarrow x \in (0, +\infty)$$

La ecuații cu radical se pune $\geq$, exemplu:

$$\sqrt{2+x} = x \quad \left| \begin{array}{r} 2+x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right| \Rightarrow x \in (0, +\infty)$$

Reguli de calcul cu puteri

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$

$a^n = a^m \Leftrightarrow n=m$

$a^n = b^n \Leftrightarrow a=b$

c m m m c

Regula de 3 simplă

cunoaştem 3 elemente din 4 şi dorim să îl aflăm pe al 4-lea. Exemplu: ne trebuie **3** kg de zahăr pentru **7** prăjituri, **câte** kg de zahăr ne trebuie pentru **9** prăjituri?

$$\begin{array}{l} 3 = 7 \\ X = 9 \end{array} \Rightarrow \frac{3}{X} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{\frac{7}{9}}{3} = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = \frac{7}{27} \Rightarrow X = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7} = 3{,}85$$

sau

$$\begin{array}{l} 3 = 7 \\ X = 9 \end{array} \Rightarrow \frac{3}{X} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{X}{3} = \frac{9}{7} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 9}{7} = \frac{27}{7}$$

deci rezultă ca pentru 9 prăjituri avem nevoie de 3,85 kg de zahăr.

FORMULE PENTRU SUBIECTE DE TIPUL I

Progresia aritmetică

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$ $\quad \forall n \geq 1$

$\boxed{S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}}$

Progresia geometrică

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ unde q = rația

$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q}$

$b_{n+2} = b_n \cdot q \cdot q$

$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

$$\boxed{S_n = \begin{cases} nb_1 & \text{,dacă } q=1 \\ b_1\frac{(q^n-1)}{q-1} & \text{,dacă } q\neq 1 \end{cases}}$$

Logaritmi

$\boxed{a^x = N \iff X = \log_a N}$

$a>0$; $a\neq 1$; $A>0$; $B>0$; $m,n \in N^*$

$\log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B$

$\log_a A:B = \log_a A - \log_a B$

$\log_a A^m = m \log_a A$

$\log_a 1:B = -\log_a B$

$\log_a a = 1$ $\qquad \log_a 1 = 0$

$\lg a = \log_{10} a$ $\qquad \ln a = \log_e a$

Permutări

$\boxed{P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n}$ prin convenție $0! = 1$

Ex 1: $5! + 2! = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)+(1\cdot2) = 120+2 = 122$

Ex 2: $\frac{3!}{4!} = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3}}{\cancel{1\cdot2\cdot3}\cdot4} = \frac{1}{4}$

Ex 3: $\frac{100!}{101!} = \frac{\cancel{100!}}{\cancel{100!}\cdot101} = \frac{1}{101}$

Ex 4: $\frac{7!}{4!} = \frac{\cancel{4!}\cdot5\cdot6\cdot7}{\cancel{4!}} = 210$

Ex 5: $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n^2+n}$

Aranjamente

$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$ unde $n \geq 1 \in N$ și $0 \leq k \leq n$

$A_n^0 = 1$

$A_n^n = n!$

Combinări

$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$ unde $n \in N$ și $0 \leq k \leq n$

$C_n^0 = 1$ $\qquad C_n^n = 1$ $\qquad C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Termenul general al dezvoltării

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

Relațiile lui Vieté (pentru polinom de grad II)

$ax^2 + bx + c = 0 \quad |:a \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

=> $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$ sau $\boxed{a(X-x_1)(X-x_2) = 0}$

Vârful parabolei asociate unei funcții

$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ unde $\frac{-b}{2a}$ este x, iar $\frac{-\Delta}{4a}$ este y.

Relațiile lui Vieté (pentru polinom de grad III)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

$S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$

$\boxed{x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0}$

Relațiile lui Vieté (pentru polinom de grad IV)

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$

$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$

$S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$

$\boxed{x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0}$

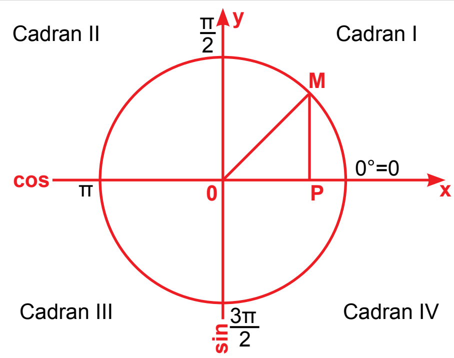
Tabelul valorilor sin, cos, tg, ctg la 30°, 45°, 60°

$\pi = 180°$

	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cercul trigonometric

$\pi = 180°$



Vectori

$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

$\vec{0A} + \vec{0B} = (x_B + x_A)\vec{i} + (y_B + y_A)\vec{j}$

Ecuatia dreptei ce trece printr-un punct și o pantă *m*

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Trigonometrie $[\ i^2 = c_1^2 + c_2^2\ ]$

Într-un Δ_{ABC} unde C are 90°:

$\sin(A) = \frac{a}{c}$

$\cos(A) = \frac{b}{c}$

$tg(A) = \frac{a}{b}$

$ctg(A) = \frac{b}{a}$

Legea sinus pentru orice Δ:

$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$

Legea cosinus pentru orice Δ:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$

Alte formule trigonometrice:

$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

$\sin(A\pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B)$

$\cos(A\pm B) = \cos(A)\cos(B) \pm \sin(A)\sin(B)$

$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$ctg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Ecuatia dreptei ce trece prin 2 puncte

$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

sau matricial

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

FORMULE PENTRU SUBIECTE DE TIPUL II

Matrice (determinantul, regula triunghiului) M_3

① $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ⑤ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ⑥ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{+① \; +② \; +③ \; -④ \; -⑤ \; -⑥}{=} aei + dhc + bfg - ceg - bdi - ahf$$

Matrice (câteva proprietăți)

Transpusa unei matrice este matricea la care rândurile se înlocuiesc cu coloanele şi viceversa.

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.

2. Determinantul este 0 dacă ... :

a). ... toate elementele unui rând sau al unei coloane sunt 0.

b). ... 2 rânduri sau 2 coloane sunt identice.

c). ... elementele a 2 rânduri sau 2 coloane sunt proporționale.

3. Dacă 3 puncte dintr-un plan sunt transpuse într-o matrice iar determinantul acesteia este 0 atunci punctele sunt coliniare.

Matrice (inversa unei matrice) A^{-1}

1. Calculăm determinantul matricei ($\Delta \neq 0$).
2. Scriem transpusa matricei (${}^tA$).
3. Calculăm elementele din matricea adjunctă (A^*) la (${}^tA$);

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

astfel: $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(d_k)}$ pentru fiecare din elementele matricei adjuncte, unde: $\mathbf{A_{ij}}$ sunt complemenți algebrici, iar determinantul $\mathbf{d_k}$ se obține prin suprimarea liniei şi a coloanei aferente fiecărui element.

4. Se aplică formula finală: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = I_n}$$

Matrice (ecuații matriciale)

Ecuația I: $A \cdot X = B$

soluția ecuației date: $\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

Ecuația II: $X \cdot A = B$

soluția ecuației date: $\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$

Matrice (sistem liniar- metoda Cramer)

1. Calculăm determinantul matricei ($\Delta \neq 0$).

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$\Delta = \det A$

Δx_1 se obține din înlocuirea coloanei coeficienților proveniți de la x_1 din cadrul determinantului matricei A cu coloana termenului liber, analog la Δx_2 şi Δx_3.